ランダム媒質とラプラシアンの固有値(偏微分方程式の解の構造の研究)

小沢, 真

数理解析研究所講究録
531巻 1984年 143-163

Random media and eigenvalues of the Laplacian
（ランダム媒質とラプラシアンの固有値）

東大理　小沢真 (Shin Ozawa)

§ Introduction

1つの金属の中に、他の少量の別種の金属が混入している。その時、得られる媒質の物理的性質はどうなるであろうか？　ここで物理的性質とは例えば、電気伝導度のようなものである。すぐにわかるように、それは混入した金属の配置によって決まる量である。

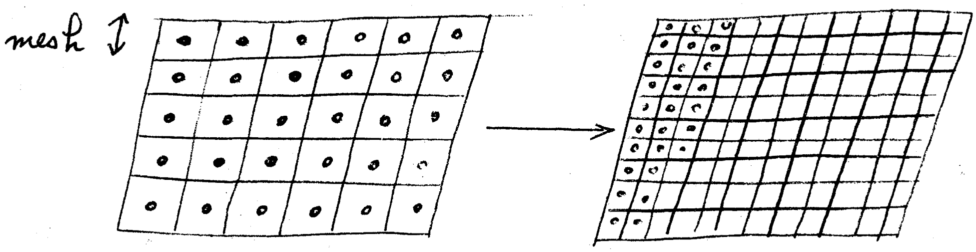
ここで「ランダム媒質」といった時、我々は、混入した金属の配置全体に適当な確率空間を設定し、その物理的性質の統計的性質を考えることを暗黙のうちに示している。　平均的電気伝導度は何か？　どのような物理的状態が多く実現されるか？

以上のような問題は極めて古く、すでに、
J. C. Maxwell, A Treatise on Electricity and Magnetism, Vol 1, Sec 314, Clarendon Press, Oxford 1881
の中にもあらわれている。そして依然として、多くの

物理学者などを惹きつけている問題である。そのような問題を数学的に厳密にとり扱う（あるいは、厳密性には、あまりこだわらずに、数理的にとり扱う）方向で極めて多くの研究が今までになされた。そして、---

--- それは未だに解決されていない。ここで解決とは、我々の立場からいえば、厳密な論理に基づいた完全な理論が出来る事をいみする。

一時期 数学的に「homogeneization の問題」が流行した。訳して、均質化とは、例えば periodic の問題

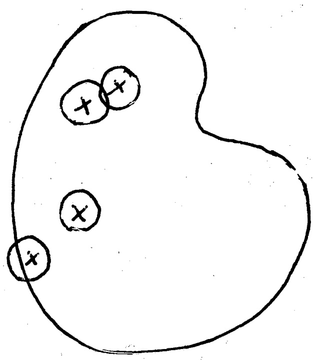


に 微量混入金属を配置してゆき、その mesh の size が少さくなったときに、その金属の性質がどのようになるか？ を mesh の size で漸近的に考察する、ことをいう。mesh の size が極めて小さくなったときには、あたかも、別の均質な金属で別の伝導度をもったもののように混合金属が振る舞うであろう。それを数学的に考察する事は、結構面白い数学を生んだ。---- しかし、その方法は、あまりにも periodicity に依存した方

法であるが為に適用範囲が狭い。ランダムネスをこめて、以上のような物理の問題を追求するには、新しい数学的手法が必要である。

§. <u>1つの定理</u>

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 内の有界領域で $\partial\Omega = \Gamma$, C^∞ class とする。 $\alpha \in (0, \infty)$, $\beta \in [1, 3)$ を1つ fix する。さて



$m \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$ を1つ決めるごとに、Ω 内の $[m^\beta]$ （[ ] は Gauss 記号），個の点 $w_1^{(m)}, \cdots, w_{[m^\beta]}^{(m)}$ が定まるとする。

$\hat{m} = [m^\beta]$, $w(m) = \{w_1^{(m)}, \cdots, w_{\hat{m}}^{(m)}\}$

と置く。そして $w_j^{(m)}$ を中心とする半径 α/m の球を $B(\alpha/m; w_j^{(m)})$,

$$\Omega_{\alpha/m; w(m)} = \overline{\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{\hat{m}} B(\alpha/m; w_j^{(m)})}$$

とおく。

さて、以下問題にしたいのは、

<u>問</u> $0 < \mu_1(\alpha/m; w(m)) \leq \mu_2(\alpha/m; w(m)) \leq \cdots$

を $\Omega_{\alpha/m; w(m)}$ で $-\Delta$ $(= -\mathrm{div\,grad})$ を考え、$\partial\Omega_{\alpha/m; w(m)}$ に Dirichlet zero 条件を与えたときの、j 番目の固有値としたとき、$m \to \infty$ の下で、$\mu_j(\alpha/m; w(m))$

がどう振る舞うか？

　ここで、次の事に注意して頂きたい。$\Omega_{\alpha/m; w(m)}$ は、$w(m)$ の配置によっては、いくつもの連結成分より成っている。　各成分に限れば、それは領域であるから その境界に Dirichlet 条件を与えたときの k 番目の Laplacian $(=-\Delta)$ の固有値が求まる。それらを各連結成分ごとに考えておき，さらにそれらを全部実数直線上に並べれば，重複度をこめて 1，2，3 番目と順序が付く。その意味での j 番目が $\mu_j(\alpha/m; w(m))$ である。

　我々は上の問を「ランダム媒質の問題」として考えたい。すなわち、半径 α/m の球の中心 $w_1^{(m)}, \cdots, w_m^{(m)}$ は各々、独立にある統計法則に従って（独立同分布）分布しているとしたときの、$\mu_j(\alpha/m; w(m))$ の統計的性質を調べたい。

$V(x) \in C^1(\bar{\Omega})$ で

$$V(x) > 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$\int_\Omega V(x)\,dx = 1$$

なるものを 1つ固定する。　すると、Ω 上に 1つ probability measure が定まり，(Ω, Vdx) は確率空間となる。　すなわち $\mathcal{B}$ を Ω の Borel subset としたとき

$$P(x \in \mathcal{B}) = \int_{\mathcal{B}} V(x)\,dx$$

で、$\mathcal{B}$ に x が含まれる事象の確率が定まる。さて、$\Omega^{\tilde{m}}$ を Ω の $\tilde{m}$ ケの直積確率空間とする。ここで読者は $V(x)>0$ という事に注意して、その意味を考えてほしい。次の定理が成立する。

Theorem 1. (Ozawa [1])

$\alpha>0$, $\beta\in[1, 9/8)$, $V(x)>0$, $j\in N$ を固定する。そのとき，β に依存する正の定数 $\delta(\beta)$ が存在し，次の事が成立する： 任意の $\varepsilon>0$, $\delta'\in[0, \delta(\beta))$ に対し

$$\lim_{m\to\infty} P\left(w(m)\in\Omega^{\tilde{m}};\ m^{\delta'-(\beta-1)}|\mu_j(\alpha/m;w(m))-\mu_j(m;V)| < \varepsilon\right)=1.$$

ここで $\mu_j(m;V)$ は $-\Delta+4\pi\alpha m^{\beta-1}V(x)$ の(Ω で考え，Γ 上 Dirichlet 条件を与えた時の) j 番目の固有値である。

注意 1. $V(x)>0$ であるから、すぐにわかるように

$$C_\ell m^{\beta-1}\le\mu_j(m;V)\le C_u m^{\beta-1}$$

なる $C_\ell, C_u>0$ が存在する。従って $\delta'>0$ ととれば

$$\mu_j(\alpha/m;w(m))=\mu_j(m;V)+O(m^{(\beta-1)-\delta'})\quad\left[\begin{array}{l}\text{多くの }\Omega^{\tilde{m}}\\ \text{の元に対し}\end{array}\right]$$

という事である。特に、$V=(\Omega\text{の体積})^{-1}$ の場合は、$\mu_j(m;V)=\lambda_j+4\pi\alpha m^{\beta-1}|\Omega|^{-1}$ となる為（(λ_j は $-\Delta$ の Ω での（Γ 上 Dirichlet 条件）j 番目の固有値)），

$$\mu_j(\alpha/m; w(m)) = 4\pi\alpha m^{\beta-1}|\Omega|^{-1} + o(m^{\beta-1-\delta'}) + O(1)$$

が得られる。上記定理は $\mu_j(\alpha/m;\cdot)$ の asymptotic property を良く表現している。再びここで強調しておくが、我々は特定に配置された球の中心に対する事実をとり扱かっているのではなく、非常に様々な球の配置に対する統計的事実を導いているのである。

注意 2. $\delta(\beta)$ は effective に計算が可能である。因みに $\beta=1$ のときは $\delta(\beta)=1/4$ ととれる。すると

$\beta=1$, $V(x)=|\Omega|^{-1}$ の場合

$$\mu_j(\alpha/m; w(m)) = 4\pi|\Omega|^{-1} + o(m^{-\delta'}) + \lambda_j. \qquad \left[\begin{array}{c}\text{多くの}\\ \text{配置}\end{array}\right]$$

$\delta(\beta)$ は実は β について continuous にとれるので、$\beta>1$ で β が 1 に十分近い場合，$V(x)=|\Omega|^{-1}$

$$\Longrightarrow \mu_j(\alpha/m; w(m)) = 4\pi m^{\beta-1}|\Omega|^{-1} + o(m^{\beta-1-\delta'}) + \lambda_j \qquad \left[\begin{array}{c}\text{多くの}\\ \text{配置}\end{array}\right]$$

で、$\beta-1-\delta'<0$ ととれる。この時 $4\pi m^{\beta-1}|\Omega|^{-1}$ が漸近第1項，λ_j が第2項となる。

さて、Theorem 1 の歴史的背景について述べておこう。M. Kac [7] は $\beta=1$ の場合（$V(x)=|\Omega|^{-1}$ の下で）

$$\lim_{m\to\infty} P(w(m)\in\Omega^m;\ |\mu_j(\alpha/m; w(m)) - M_j(m;V)| < \varepsilon) = 1$$

を証明した。方法は Brown運動を用いた確率論的証明

である。この証明の為に彼は Wiener sausage という概念を考え、これは以後確率論の1つの topic となった。Kac は remainder estimate ($\delta(\beta)>0$ の存在)を証明していない。 J. Rauch - M. Taylor [5] は $\beta=1$ の時に、$V(x) = |\Omega|^{-1}$ の制限をとり除いた。証明は Feynmann-Kac の公式と Wiener sausage であり、やはり remainder estimate が得られていない。 Papanicolaou - Varadhan [6] は対応する問題を diffusion problem の場合に扱っていて興味深い。ただし remainder estimate は得られていない。これも確率論的証明である。Hurustov - Marchenko [8] は $\beta=1$ の場合をポテンシャル論的に取り扱っている。$\beta=1$ の場合、Ozawa [2] は摂動論的方法(後で述べる)によって、remainder estimate が可能である事を示した。

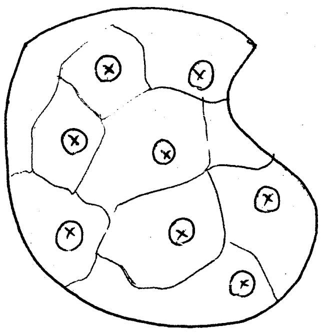
さて、$\beta>1$ の場合は、著者の知る限りにおいて、Ozawa [1] が最初の結果である。それには、それ相応の理由がある。というのは、$\beta>1$ の場合には、結果の中に $-\Delta+4\pi\alpha m^{\beta-1}V(x)$ という m に依存する作用素が出現する為、従来の方法は様々な困難に直面するからである。---- 私的な事について話す。私は、外国のこの方面の専門家(probabilist)に手紙を書いた。

"Brown運動のみを用いた純確率論的証明が出来ないか？考えてくれ"　答は "I doubt, ⋯" であった。しかし、これは捨てるにはもったいない問題である。

<u>問題</u>　Theorem 1 を Brown運動を用いて証明せよ。

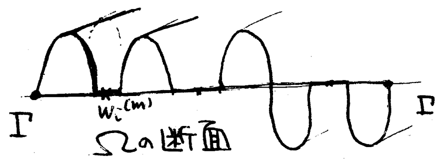
§. <u>直観的説明</u>

が出来ない定理は面白くない? Theorem 1 がどのような事を意味しているのかについて考えてみよう。今

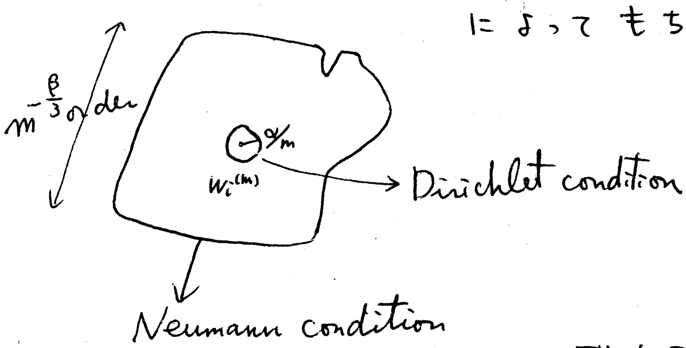


$W(m)$ の配置について考える。さて、$W_1^{(m)}, \cdots, W_{\hat{m}}^{(m)}$ と $\hat{m}$ 個の球の中心が Ω の内を、動いているとすると、これらのすべての配置の中で、多く実現するのは、次のような配置であろう。すなわち、1つ $W_j^{(m)}$ をとってきたとき $W_j^{(m)}$ に一番近い $W_i^{(m)}$ との距離が $m^{-\beta/3}$ の order である。これは Ω が $\mathbb{R}^3$ 内の領域である事を反映している。この事情のもとで、$-\Delta$ の $\Omega \setminus \overline{\hat{m}\text{-balls}}$ の境界上 Dirichlet 条件の下での j-th eigenvalue に付随した eigenfunction について考える。我々は $B(\alpha/m\,;W_i^{(m)})$ 達の境界で固有函数を 0 におさえつけているから、

固有函数は、$m \to \infty$ のとき、どんどんと波だってくるだろう。すると、波を、布のしわだと思うと、そのしわには、尾根のような場所があらわれる。さて、尾根というのはNeumann条件に相当する。



すると、尾根に囲まれた地域（それを連結成分ごとに考えれば）それは1つのblockを形成する。下にそのblockを書いてみる。blockの境界は $w(m)$ の配置によってもちろん変化するが、典型的なのは、左の図のようにblockの大きさが $m^{-\frac{\beta}{3}}$ orderの場合である。



さて $\mu_j(\alpha/m; w(m))$ は、このblockの外側にNeumann条件、内側の球の境界にDirichlet条件を置いたときの、Laplacianの1st eigenvalueである。それは、内にDirichlet boundaryがあるために正の数となっている。$m \to \infty$ のときの、blockの1st eigenvalueの漸近的性質について考えてみる。

今、このblockを相似拡大して（$m^{\frac{\beta}{3}}$倍に各座標を拡大）みれば、blockのsizeがorder 1、内側のDirichlet boundaryのsizeが $\alpha m^{(\beta/3)-1}$ となる。$\beta < 3$ であるの

で，この量は zero にゆく。ところで，このときの拡大された block での $-\Delta$ の 1st eigenvalue は Ozawa [3] によれば，内側の球の半径に比例する。そして，それは

$$m^{(\beta/3)-1} \quad \text{order}$$

であり，故に，相似拡大される前の $-\Delta$ の 1st eigenvalue は

$$m^{(\beta/3)-1} \times m^{(2/3)\beta} = m^{\beta-1} \quad \text{order}$$

となる。

以上のように考えれば，

$$\mu_j(\alpha/m ; w(m)) = m^{\beta-1} \quad \text{order}$$

であることが説明できる。Theorem 1 は，さらに詳しい事が成りたつ事を述べている。

注意 3　$\hat{m}$-balls の体積 $= [m^{\beta}] \times \frac{4}{3}\pi(\alpha/m)^3 \downarrow 0 \quad (m\to\infty)$ に注意しよう。それにもかかわらず，$\mu_j(\alpha/m ; w(m))$ は ∞ へ近づく。

問題　Theorem 1 を $\beta<3$ の場合に一般化せよ。$\beta=3$ のときは，どうか？

§ Green 函数の摂動計算

は非常に強力である。

これより、Theorem 1 の証明のスケッチについて述べてみよう。

$\beta \in [1,3)$ を固定する。今 $w(m)$ に関する次の条件を考える。

$(D)_m$: $\overline{\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{\tilde{m}} B(\alpha/m; w_i^{(m)})}$ の連結成分を

$\omega_1(w(m)), \cdots, \omega_{g(w(m))}(w(m))$

とする。（$g(w(m))$ は $w(m)$ の函数）

$\Longrightarrow$ $g(w(m)) = 1$ すなわち連結成分の数は 1つ

または

$$\max_{2 \le s \le g(w(m))} \operatorname{diam} \omega_s(w(m)) \le m^{-1} \log m$$

が成りたつ。

次の Lemma が成りたつ。

<u>Lemma</u> $\beta \in [1,3)$ とする。そのとき

$$\lim_{m \to \infty} P(w(m) \in \Omega^{\tilde{m}} ; w(m) \text{ が } (D)_m \text{ をみたす})$$
$$= 1.$$

これにより、Theorem 1 を証明するにあたっては、$w(m)$ が $(D)_m$ をみたしているとして証明すればよい。

さて $w(m)$ が $(D)_m$ をみたし、$g(w(m)) \ge 2$ としてみる。すると $\omega_s(w(m))$, $s = 2, \cdots, g(w(m))$ での $-\Delta$（境界上

Dirichlet 条件）の 1st eigenvalue は 下より

$$c\, m^2(\log m)^{-2}$$

でおさえられる。すると $m^{\beta-1}$ （$\beta\in[1,3)$）より、それは大きい。だから、j を fix しておくかぎり、そのような小さな連結成分からは j-th eigenvalue は（$m\to\infty$）のとき現われ得ない。以上により、$w(m)$ が $(D)_m$ をみたしていて，かつ考察の対象とすべきは $\omega_1(w(m))$ である事がわかる。

さて、次の Lemma も組み合わせ議論により容易にわかる。

<u>Lemma</u>：

$$\lim_{m\to\infty} P(w(m)\in\Omega^{\hat{m}};\ w(m) \text{ が } (E)_m \text{ をみたす}) = 1$$

ここで、

$(E)_m$： 今 I の subset R_m で（I に induce された計量で）半径 $2m^{-1}\log m$ の disk を任意にとってくる。そのとき、

$$R_m \setminus \overline{\bigcup_{i=1}^{\hat{m}} B(\alpha/m\,;\, w_i^{(m)})} \neq \phi.$$

注意　すでに幾人かの人に配布したプレプリントの中では R_m は I の subset で $\operatorname{diam} R_m > 2m^{-1}\log m$ なるものとしてある。これは訂正する必要がある。

さて．以後 $\underline{\underline{\omega_1(w(m)) = \omega}}$。$\gamma > \beta - 1$ とし，$m' = [m^\gamma]$。
$G_{(m')}(x, y; w(m))$ で $\Delta - m'$ の ω での Green 函数（境界条件は Dirichlet 条件）とする。すなわち．

$$(\Delta_x - m')G_{(m')}(x, y; w(m)) = -\delta(x-y), \qquad x, y \in \omega$$

$$G_{(m')}(x, y; w(m)) = 0 \qquad x \in \partial\omega$$

次に．$\Delta - m'$ の Ω での Green 函数（Dirichlet 条件）を $G_{(m')}(x, y)$ とする。以後 $\underline{G_{(m')}(x, y)}$ を $\underline{G(x, y)}$ と書く。
また．簡単の為 $w_i^{(m)}$ を w_i と書く。

$$h_{(m')}(x, y; w(m))$$

$$= G(x, y) - (4\pi\alpha/m)e^{m''\alpha/m}\sum_{i=1}^{\hat{m}} G(x, w_i)G(w_i, y)$$

$$+ \sum_{s=2}^{m^*}(-4\pi\alpha/m)^s e^{m''\alpha s/m}$$

$$\sum_{(s)} G(x, w_{i_1})G(w_{i_1}, w_{i_2}) \cdots G(w_{i_{s-1}}, w_{i_s})G(w_{i_s}, y)$$

とおく。ここで．

$m'' = (m')^{1/2}$，$m^* = (\log m)^2$

$\sum_{(s)}$ は $(i_1, \cdots, i_s)$ なる添字が．$i_1 \neq i_2, i_2 \neq i_3, \cdots, i_{s-1} \neq i_s$ かつ $1 \leq i_1, \cdots, i_s \leq \hat{m}$ なるものすべてを動くものの総和を表わす。

さて．このように置いた時．$h_{(m')}(x, y; w(m))$ は．$G_{(m')}(x, y; w(m))$ の良い近似になる。これが．Theorem 1 の証明の key point

である。もう少し詳しく調べよう。

$$(\mathbb{G}_{(m')}f)(x)=\int_{\omega} G_{T(m')}(x,y;w(m))f(y)\,dy, \qquad x\in\omega$$

$$(\mathbb{H}_{(m')}f)(x)=\int_{\omega} h_{(m')}(x,y;w(m))f(y)\,dy, \qquad x\in\omega$$

と置く。 $h_{(m')}$ が $G_{T(m')}$ に近いとは.

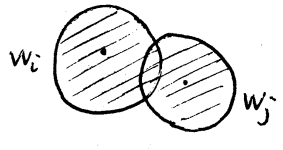
<u>Proposition</u>　$\beta\in[1,3)$, $\varepsilon>0$ を固定する。今 $\gamma>\beta-1$ とする。 $\nu>0$ を固定。そのとき.

$$\lim_{m\to\infty} P(w(m)\in\Omega^{\tilde{m}}\,;\,(D)_m,\,(E)_m,\,(*)\ \text{が成立}) = 1$$

ここで,

(*)
$$\|\mathbb{G}_{T(m')}-\mathbb{H}_{(m')}\|_{L^2(\omega)} \le C\left[\tilde{m}\, m^{-2+\nu}\left(1+|\log m|(m')^{\nu}\varepsilon\right)\right].$$

この証明は極めて面倒であり、また delicate trick を必要とする。 L^p-theory を用いるし、また 球 $B(\alpha/m; w_i)$ と $B(\alpha/m; w_j)$ が重なるような場合をも含んでいるので、複雑



である。詳しく知りたい方はプレプリントを参照していただきたい。 Ozawa [1].

ともかくも、非常に面倒な、routineでない計算を行なうことによって、Theorem 1 は証明される。極だって複雑なのは、γ を $\beta-1$ より大きくとり、しかも、大きくなりすぎないようにとり、確率計算を行なう点である。Expectation をこめて計算しないと、期待すべき結果は得られない。

§. 何故に摂動計算が有効か？

という事をひと言でまとめてしまうのは易しくない。それは、摂動計算で得られる結果が、相当広いだろうという事を、今後、実証してゆく他はない！

既に述べたようにKacの結果（$\beta=1$）は確率過程の考え方で、証明できる。だから、この時点では摂動計算の優位性は顕著でない。しかし、Kacの方法は球（微小球）の境界が吸収壁（Dirichlet boundary）であるときには有効だが、反射壁（Neumann boundary）の場合には不明になる。Neumann boundary は Wiener sausage 的思考に fit していない。

さて、Ozawa [4] には、次の事が証明されている。今 Ω を $\mathbb{R}^2$ の有界領域とし、その境界 Γ は滑らかとする。$w \in \Omega$ を固定する。$B(\varepsilon;w)$： w 中心

半径 ε の開球. $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{B(\varepsilon; w)}$.

固有値問題

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda u(x) & x \in \Omega_\varepsilon \\ u(x) = 0 & x \in \Gamma \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0 & x \in \partial B(\varepsilon; w) \end{cases}$$

の eigenvalue を $0 < \mu_1(\varepsilon) \leq \mu_2(\varepsilon) \leq \cdots$ と重複度をこめて繰り返し並べる。 $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots$ で $-\Delta$ (Γ 上 Dirichlet 条件) の eigenvalue とする。

Theorem 2. j を固定する。μ_j を単純固有値と仮定する。

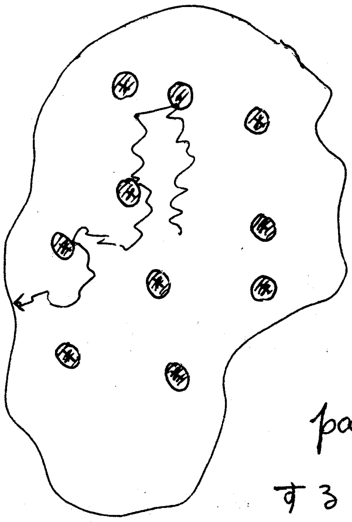
$$\Longrightarrow \quad \mu_j(\varepsilon) = \mu_j - \varepsilon^2 \left(2\pi |\mathrm{grad}\, \varphi_j(w)|^2 - \pi \varphi_j(w)^2 \mu_j \right) + O(\varepsilon^3 |\log \varepsilon|^2) \qquad \varepsilon \downarrow 0.$$

ここで, $\varphi_j(x)$ は $\int_\Omega \varphi_j(x)^2 dx = 1$ と正規化された $-\Delta$ (Γ 上 Dirichlet 条件) の Ω での eigenfunction.

注意: もし領域摂動による固有値問題の研究に興味があるならば, まず Ozawa [4] を読んでいただきたい。それは全く routine ではない trick と, 執拗な計算が必要である。 上の Theorem 2 は一見して, その意味がわかりにくく見えるかもしれないが, 次に示すように相当に

深い意味がかくされている。

今、$\mathbb{R}^2$の領域に多数のNeumann obstacle（diskで、境界が反射壁条件をみたすもの）が入っているとしよう。



今、そのobstacleがある為に、obstacleの間を拡散してゆくBrownian particleは、どのような影響をうけるであろうか？ 簡単のため境界は吸収壁であるとする。吸収壁に到達するとparticleは死んでしまうが、そこに到達するまでの時間はどう変化するだろうか？

これに対して、直観的には、時間は遅くなるという事がいえる。"人のいっぱいいる所を歩いてゆく事を考えよ。人にぶっかったらはじきとばされるので進みにくいではないか！"

さて、Theorem 2 は、多数のNeumann obstacleの場合、次のように表わされる。

今 $\{w_i^{(m)}\}_{i=1}^{[m^\delta]}$ （$\delta<2$ をfix）を $[m^\delta]$ 個の半径 $1/m$の円板の中心とする。$w_i^{(m)}\in\Omega$, $[m^\delta]=\hat{m}$ とおく。ここでは、$\{w_i^{(m)}\}=w(m)$ のrandomな配置を考えるのではなく、deterministic case を考える。

<u>仮定 (I)</u> $V(x)\in C^1(\overline{\Omega})$ なる函数が存在して、任意の $f\in L^1(\Omega)$ に対し、

$$\frac{1}{\tilde{m}}\sum_{i=1}^{\tilde{m}} f(w_i^{(m)}) \longrightarrow \int_\Omega f(x)V(x)\,dx.$$

仮定 (ii)

$$|w_i^{(m)} - w_j^{(m)}| \geq C\, m^{-(\delta/2)} \qquad (i \neq j)$$

なる $C>0$ が存在する。

以上の仮定のもとで,

$\Omega \setminus \overline{\tilde{m}\text{-obstacles}}$ の $-\Delta$ の j-th eigenvalue

(Γ 上 Dirichlet, $\overline{\text{obstacles}}$ 上 Neumann 条件) $\mu_j(1/m; w(m))$

は,

$$\mu_j(1/m; w(m)) - \mu_j = -\tilde{m}\, m^{-2}\int_\Omega \left(2\pi\,|\mathrm{grad}\,\varphi_j(w)|^2 - \pi\mu_j\,\varphi_j(w)^2\right) \times V(w)\,dw$$
$$+ \text{ remainder term} \quad (m \to \infty)$$

を満たす。

この事実は, 驚くべき点を含んでいる。今 $V(x) = |\Omega|^{-1}$ ($|\Omega|$: Ωの面積) としよう。すると

$$\mu_j(1/m; w(m)) - \mu_j = -\pi\mu_j\, m^{\delta-2}|\Omega|^{-1} + \text{remainder}$$

となる。言いかえれば

$$\mu_j(1/m; w(m)) = \mu_j(1 - \pi\mu_j m^{\delta-2}|\Omega|^{-1}) + \text{remainder}$$

さて

$$1 - \pi\mu_j m^{\delta-2}|\Omega|^{-1}$$

なる量は、Ωの中のobstacle達を除いた部分のΩの面積に対する比＝空隙率である。さて、それは、ちょうど、

$$-\triangle \longrightarrow -(\text{空隙率})\times\triangle$$

とoperatorが変化したに等しい。すなわち、拡散係数が減少した、という事以上の事を含んでいる。このような事がrigorousに証明できるわけである。

以上の事はrandom Neumann obstacleの場合はどうか？

このように考えると、既に述べてきたことが様々な数理物理の問題と直結していることがわかるだろう。著者は、Boltzmann equationやself-diffusion problemや、…その他の問題と以後深く関連してくる事をここで断言しておきたい。

References

Ozawa [1] Random media and eigenvalues of the Laplacian (preprint 1983)

[2] On an elaboration of M. Kac's theorem concerning eigenvalues of the Laplacian in a region with randomly distributed small obstacles, Commun. Math. Phys. 91, 473–487 (1983)

[3] Singular variation of domains and eigenvalues of the Laplacian, Duke Math. J. 48, 767–778 (1981).

[4] Spectra of domains with small spherical Neumann boundary, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec IA, 30, 259–277 (1983).

Rauch–Taylor [5] Potential and scattering theory on wildly perturbed domains. J. Funct. Anal. 18 27–59 (1975)

Papanicolaou–Varadhan [6] Diffusion in region with many small holes Lecture Notes in Control and Information. 75, Springer 1980, pp 190–206

Kac [7] Probabilistic methods in some problems of scattering theory. Rocky Mountain J. Math. 4, 511-538 (1974).

Hurslov-Marchenko [8] Boundary value problems in region with fine-grained boundaries. (in Russian) Kiev 1974.

その他

Miksis : Effective dielectric constant of a nonlinear composite material. Siam J. Appl. Math. 43, (1983) 1140-1155

Kohler - Papanicolaou : Some applications of the coherent potential approximation in multiple scattering and waves in random media, P. L. Chow, W. E. Kohler and G. C. Papanicolaou, eds. North-Holland, 1981, pp. 1992-2023.